

Correction du TD 5 - Réduction des endomorphismes

1 Sur la diagonalisation des matrices

1.1 Matrices réelles diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On considère les matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'elles :

- en calculer le polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres ;
- déterminer les sous-espaces propres associés ;
- justifier que la matrice est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ (où n est la taille de la matrice), et déterminer P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

CORRECTION : Pour A_1 :

$P_{A_1}(X) = (X-1)(X-2)$; valeurs propres : 1 et 2 ; vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à 1 et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à 2. D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour A_2 :

$P_{A_2}(X) = (X-1)(X+2)^2$; valeurs propres 1 et -2 (cette dernière de multiplicité 2).

Cherchons les vecteurs propres associés. Pour la valeur propre 1, on trouve le système

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne un espace propre de dimension 1 engendré par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre -2, on trouve la seule équation $x + y + z = 0$ ce qui donne un espace propre de dimension 2 engendré par les vecteurs $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

Donc B est bien diagonalisable et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices réelles diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$, avec $n = 2$ ou $n = 3$.

On considère les matrices suivantes.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'elles :

- calculer le polynôme caractéristique ; la matrice est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?
- Dans la suite on considère chaque matrice comme une matrice à coefficients complexes. Déterminer les valeurs propres (complexes), et les sous-espaces propres associés.
- Déterminer P inversible et D diagonale à coefficients complexes telles que $P^{-1}BP = D$.

CORRECTION : Pour B_1 :

$P_{B_1}(X) = X^2 - 4X + 9$, dont les racines sont $2 \pm \sqrt{5}$. La matrice C est donc diagonalisable. On obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} & \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-i\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Pour B_2 : $P_{B_2}(X) = X^3 + 4X = X(X-2i)(X+2i)$, dont les racines sont $0, 2i, -2i$. La matrice B_2 est donc diagonalisable. On obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \text{diag}(0, 2i, -2i)$$

1.3 Matrices réelles non diagonalisables

On considère

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer le polynôme caractéristique de M et de N , en déduire les valeurs propres.
- Déterminer les sous-espaces propres associés.
- Justifier qu'elles ne sont diagonalisables ni sur \mathbb{R} , ni sur \mathbb{C} .

CORRECTION : Pour M : $P_M(X) = (X-1)^2$, une seule valeur propre : 1. Mais l'espace propre associé est de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc M n'est pas diagonalisable.

Pour N : $P_N(X) = (X+2)(X-1)^2$, les valeurs propres sont -2 (valeur propre simple) et 1 (de multiplicité 2).

On sait déjà que l'espace propre associé à la valeur propre -2 est de dimension 1. Cherchons l'espace propre associé à 1. On trouve le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \\ 4x + 8y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 3z = -12x \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -4x \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à 1 est donc de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

1.4 Exercices d'entraînement

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Applications de la diagonalisation des matrices

2.1 Puissances d'une matrice

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$.
 - (a) Diagonaliser A : montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
 - (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

CORRECTION : 1) La matrice est triangulaire, il est facile de voir que les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

2) L'espace propre associé à 2 est de dimension 1. Cherchons celui associé à 1. On trouve le système :

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ cz = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

3) Si $a = 0$, le sous-espace propre est de dimension 2, c'est le plan d'équation $z = 0$, engendré par

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc la matrice est diagonalisable. Cherchons un vecteur propre associé à

2. On trouve le système :

$$\begin{cases} -x + bz = 0 \\ -y + cz = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = bz \\ y = cz \end{cases}$$

Posons $v_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient la matrice de passage P et la matrice diagonale D suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \text{diag}(1, 1, 2)$$

4) On a $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(1, 1, 2^n)$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (2^n - 1)b \\ 0 & 1 & (2^n - 1)c \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2.2 Application aux suites définies par une relation de récurrence linéaire

2.2.1 Relation de récurrence d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n > 2$.

a) Calculer les termes u_2, u_3, u_4 en fonction de u_0 et u_1 .

b) En introduisant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme $U_{n+1} = AU_n$, avec une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ à préciser.

c) Démontrer (par récurrence) que : $\forall n \geq 1$, on a $U_n = A^n U_0$.

d) Justifier que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, et déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. (Rappel : section 1.1)

e) Soit $n \geq 1$. Expliciter A^n , et en déduire la valeur de U_n puis celle de u_n . (Cette expression était-elle devinable?)

CORRECTION :

a) $u_2 = 3u_1 - 2u_0$; $u_3 = 3(3u_1 - 2u_0) - 2u_1 = 7u_1 - 6u_0$; $u_4 = 3(7u_1 - 6u_0) - 2(3u_1 - 2u_0) = 15u_1 - 14u_0$.

b) On a le système

$$\begin{cases} u_{n+1} &= & u_{n+1} \\ u_{n+2} &= & -2u_n + 3u_{n+1} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} U_n.$$

c) La relation est vraie pour $n = 1$ grâce à la formule précédente : $U_1 = AU_0$.

Supposons que $U_n = A^n U_0$. Alors $U_{n+1} = AU_n = A.A^n U_0 = A^{n+1} U_0$. On a bien démontré l'égalité par récurrence.

d) le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc P_A est scindé et ses racines sont simples, donc A est diagonalisable.

On a $D = \text{diag}(1, 2)$. Cherchons les vecteurs propres associés.

Pour $\lambda = 1$, on trouve l'équation $y = x$, donc un vecteur propre associé est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 2$, on trouve l'équation $y = 2x$, soit un vecteur propre associé $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) On a alors

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit U_n :

$$U_n = \begin{pmatrix} (2 - 2^n)u_0 + (2^n - 1)u_1 \\ (2 - 2^{n+1})u_0 + (2^{n+1} - 1)u_1 \end{pmatrix}$$

d'où $u_n = (2 - 2^n)u_0 + (2^n - 1)u_1$.

On retrouve les valeurs obtenues en a) pour u_2, u_3, u_4 .

2.2.2 Système défini par une relation de récurrence

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 3v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

CORRECTION : 1) $P_A(X) = X^2 - 2X - 8 = (X + 2)(X - 4)$. Le polynôme est scindé aux valeurs propres simples, donc A est diagonalisable.

On a $D = \text{diag}(-2, 4)$. Cherchons les vecteurs propres associés.

Pour $\lambda = -2$, on obtient l'équation $x + y = 0$, soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 4$, on obtient l'équation $y = x$, soit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors comme précédemment :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}$$

2) Posons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a clairement $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$.

Comme dans l'exercice précédent, on a $U_n = A^n U_0$, d'où

$$\begin{cases} u_n &= \frac{3}{2} \times 4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ v_n &= \frac{3}{2} \times 4^n + \frac{1}{2}(-2)^n \end{cases}$$

2.3 Application à la résolution de systèmes différentiels

Soit $m, k > 0$. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Cette équation apparaît quand on considère un ressort de raideur k , posé sur un plan, et auquel est accrochée une masse m . Si on tire la masse (en étirant le ressort) et qu'on lâche et qu'il n'y a pas de frottements, alors l'écart $x(t)$ entre la position de la masse à l'instant t et la position d'équilibre (quand

le ressort n'est pas étiré) satisfait l'équation différentielle précédente. Enfin, pour traduire qu'on a étiré le ressort de la longueur h , puis qu'on a lâché la masse (sans lui donner de vitesse), on rajoute les conditions

$$x(0) = h, \quad x'(0) = 0.$$

a) En introduisant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, écrire le problème sous la forme

$$X'(t) = BX(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} x(0) = h \\ x'(0) = 0 \end{pmatrix}$$

avec une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ à préciser.

b) Déterminer $P \in M_2(\mathbb{C})$ inversible et $D \in M_2(\mathbb{C})$ diagonale telles que $B = PDP^{-1}$. (Rappel : section 1.2)

c) On introduit le vecteur $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Démontrer que Y vérifie

$$Y'(t) = DY(t), \quad Y(0) = P^{-1}X(0).$$

d) En déduire $Y(t)$, puis $X(t)$ en pour finir $x(t)$. Comment décrire le mouvement de la masse ?

CORRECTION :

a) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, donc $X'(t) = BX(t)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Le polynôme caractéristique de B est $X^2 + \frac{k}{m}$ dont les racines sont $\lambda_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda_2 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$. La matrice B admet 2 valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} . Elle est donc diagonalisable dans \mathbb{C} . Le vecteur propre associé à $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$, celui associé à $i\sqrt{\frac{k}{m}}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$.

Donc si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\frac{k}{m}} & i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2i\sqrt{\frac{k}{m}}} \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{k}{m}} & -1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{m}{k}} \\ 1 & -i\sqrt{\frac{m}{k}} \end{pmatrix}$ et $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{k}{m}} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$.

c) Si $Y(t) = P^{-1}X(t)$, alors $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}BX(t) = P^{-1}BPY(t) = DY(t)$, avec $Y(0) = P^{-1}X(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{\frac{m}{k}} \\ 1 & -i\sqrt{\frac{m}{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h/2 \\ h/2 \end{pmatrix}$.

d) Donc si $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, y_1 et y_2 vérifie une équation du type $y'(t) = \lambda y(t)$. On en déduit que $y(t) = e^{\lambda t}y(0)$.

Il vient $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix} Y(0) = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix}$.

Puis $X(t) = PY(t) = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\frac{k}{m}} & i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix} = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ -i\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + i\sqrt{\frac{k}{m}}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix}$.

On en déduit que $x(t) = \frac{h}{2}(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}) = h \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

3 Sur la diagonalisation des endomorphismes

3.1 Exemple 1

Soit E un espace vectoriel complexe, muni d'une base (e_1, \dots, e_n) . Soit f un endomorphisme de E tel que $f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, n-1$ et $f(e_n) = e_1$.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de f .
- (b) En déduire que f est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

CORRECTION : 1) Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X^n - 1$.

2) Les valeurs propres sont toutes les racines n ème de l'unité. Comme elles sont toutes distinctes, l'endomorphisme est diagonalisable.

3.2 Exemple 2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E . On considère f l'endomorphisme de E de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer $A + I_n$.
- 2) En déduire $\text{Im}(f + id_E)$, puis la dimension du noyau $\text{Ker}(f + id_E)$.
- 3) Calculer $f(\sum_{i=1}^n e_i)$.
- 4) En déduire que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .
- 5) Que vaut $\det(A)$?
- 6) Pour $n = 4$, trouver une matrice M de $M_4(\mathbb{C})$ telle que

$$M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

CORRECTION :

- 1) $A + I_n$ est la matrice composée de 1 sur toutes les lignes et colonnes.

- 2) On en déduit que l'image de $f + id_E$ est engendrée par le vecteur $e_1 + \dots + e_n$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\text{Im}(f + id_E)$ est de dimension 1, et par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(f + id_E) = n - 1$.

- 3) $f(e_1 + \dots + e_n) = (n - 1)(e_1 + \dots + e_n)$ (il suffit de calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$).

- 4) Comme $\sum_{i=1}^n e_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $n - 1$, et $\dim \text{Ker}(f + id_E) = n - 1$, il existe une base de vecteurs propres $v_1 = \sum_{i=1}^n e_i$ et v_2, \dots, v_n de $\text{Ker}(f + id_E)$. Donc $f(v_1) + v_1 = (n - 1)v_1$ et $f(v_i) + v_i = 0_E$, donc $f(v_1) = (n - 2)v_1$ et $f(v_i) = -v_i$ pour $i \geq 2$. On en déduit que A (ou f) est diagonalisable de valeurs propres $(n - 2)$ de multiplicité 1 et -1 de multiplicité $n - 1$.

- 5) $\det A = (n - 2)(-1)^{n-1}$.

6) Pour $n = 4$, on calcule les vecteurs propres associés à -1 . On trouve l'équation $x + y + z + t = 0$, soit

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ par exemple. Donc}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Il suffit alors de choisir } M = P \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm i \end{pmatrix} P^{-1} \text{ (16 choix possibles).}$$

3.3 Symétrie

Soient E un espace vectoriel et $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = id_E$.

- Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont 1 et -1 .
- Soit $x \in E$. Vérifier qu'il existe des vecteurs x^+ et x^- tels que $x = x^+ + x^-$ et $s(x^\pm) = \pm x^\pm$.
- En déduire que s est diagonalisable.
- Décrire l'action de s par un dessin.

3.4 Dans l'espace des polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = XP'(X)$.

- Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Prouver que f est diagonalisable.

3.5 Dans l'espace des fonctions continues

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et à valeurs réelles. Soit

$$\phi : E \rightarrow E, \quad \phi(f)(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+t) f(t) dt.$$

- Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E .
- Déterminer ses valeurs propres et fonctions propres. On pourra procéder par analyse-synthèse : si f est une fonction propre, alors... ; réciproquement, si f est de cette forme, alors...

CORRECTION : Soit $f \in E$. On a $\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$, donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+t) f(t) dt = \cos x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt - \sin x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt.$$

Mais $x \mapsto \cos x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt$ et $x \mapsto \sin x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt$ sont continues sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $x \mapsto \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+t) f(t) dt$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et à valeurs réelles, donc ϕ est bien définie.

Par linéarité de l'intégrale

$$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g), \quad \phi(\lambda f) = \lambda \phi(f),$$

donc ϕ est un endomorphisme de E .

b) Partie analyse : supposons que f est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda : \phi(f) = \lambda f$, donc

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \lambda f(x) = \cos x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt - \sin x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt.$$

Deux sous-cas à distinguer :

— si $\lambda = 0$, alors

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt - \sin x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt = 0.$$

On note

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt, \quad B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt,$$

donc

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad A \cos x - B \sin x = 0.$$

On multiplie par $\cos x$ et on intègre sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (A \cos x - B \sin x) \cos x dx = 0.$$

Or

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0.$$

Donc $A \frac{\pi}{2} = 0$, donc $A = 0$. De même, en multipliant par $\sin x$, on trouve que $B = 0$. Donc :

$$\lambda = 0 \implies \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt = 0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt.$$

— si $\lambda \neq 0$: alors f est une combinaison linéaire de \cos et \sin :

$$f(x) = \frac{A}{\lambda} \cos x - \frac{B}{\lambda} \sin x.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \left(\frac{A}{\lambda} \cos t - \frac{B}{\lambda} \sin t \right) dt \\ &= \frac{A}{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt - \frac{B}{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{A}{\lambda} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc $A = 0$ ou $\lambda = \frac{\pi}{2}$. De même,

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \left(\frac{A}{\lambda} \cos t - \frac{B}{\lambda} \sin t \right) dt \\ &= \frac{A}{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos t dt - \frac{B}{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = -\frac{B}{\lambda} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc $B = 0$ ou $\lambda = -\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\lambda \neq 0 \implies f(x) = \frac{A}{\lambda} \cos x - \frac{B}{\lambda} \sin x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{\pi}{2}, \\ B = 0 \text{ ou } \lambda = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Partie synthèse :

— si $f \in E$ et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t f(t) dt = 0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t f(t) dt,$$

alors $\phi(f) = 0$, donc f est une fonction propre de ϕ associée à la valeur propre 0. (Remarque : il existe de telles fonctions : par exemple $f(t) = \cos(5t)$.)

— si $\lambda = \frac{\pi}{2}$, alors $f(x) = \cos x$, on a $\phi(f) = \frac{\pi}{2} \cos = \frac{\pi}{2} f$, donc $\frac{\pi}{2}$ est valeur propre, et le sev propre $E_{\pi/2}$ est exactement \cos , puisque toute fonction propre doit être de la forme $A \cos + B \sin$, et que $B = 0$ puisque $\lambda \neq -\frac{\pi}{2}$.

— De même, si $\lambda = -\frac{\pi}{2}$, alors $f(x) = \sin x$, on a $\phi(f) = -\frac{\pi}{2} \sin = -\frac{\pi}{2} f$, donc $-\frac{\pi}{2}$ est valeur propre, et le sev propre $E_{-\pi/2}$ est exactement \sin , puisque toute fonction propre doit être de la forme $A \cos + B \sin$, et que $A = 0$ puisque $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$.

Au final, les valeurs propres sont 0, $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.